Listy Biometryczne - Biometrical Letters
Vol.27 (1990), No.1,2, 61-86

ANALIZA MODELU DWUKIERUNKOWEJ KLASYFIKACJI HIERARCHICZNEJ*

Anna Molińska, Krzysztof Moliński

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych
Akademia Rolnicza, Wojska Polskiego 28, 60-637 Poznań

Streszczenie

Praca przedstawia analizę danych doświadczalnych podlegających dwukierunkowej klasyfikacji hierarchicznej przy założeniu modelu stałego, mieszanego lub losowego. Analiza polega na testowaniu hipotez dotyczących różnych funkcji parametrycznych oraz punktowej i przedziałowej estymacji tych funkcji.

1. WSTĘP

Praca poświęcona jest analizie doświadczeń dwuczynnikowych, w których czynniki uporządkowane są hierarchicznie, tzn. tak, że poziomy czynnika stopnia niższego (B) występują zawsze łącznie tylko z jednym poziomem czynnika stopnia wyższego (A). Metody analizy takich doświadczeń zależą od tego, który z czynników uznany jest za stały, (ściślej - o poziomach ustalonych) a który za losowy (ściślej - o poziomach wylosowanych). W tym aspekcie rozważać można trzy sytuacje

a) oba czynniki są stałe,

b) czynnik A jest stały, a czynnik B losowy,

c) oba czynniki są losowe.

Model matematyczny opisujący doświadczenia w wymienionych przypadkach zwany jest odpowiednio w sytuacji a) modelem stałym, w sytuacji b) modelem mieszanym, a w sytuacji c) modelem losowym.

W pracy analizować będziemy kolejno wymienione wyżej trzy typy modeli. Dla każdego z modeli rozważymy zagadnienie estymacji punktowej i przedziałowej parametrów modelu oraz zagadnienie testowania interesujących hipotez parametrycznych. Przyjmiemy założenie o jednakowej liczbie obserwacji dla każdej kombinacji poziomów czynników (jednakowej liczbie

---

Słowa kluczowe: model dwukierunkowej klasyfikacji hierarchicznej, analiza wariancji, testowanie hipotez, estymacja punktowa, przedział ufności

* Praca wykonana w ramach problemu CPBP 05.01.-3.9 koordynowanego przez Instytut Genetyki Roślin PAN

jednostek doświadczalnych). Pokażemy, że takie założenie umożliwia pełną analizę modelu stałego i mieszanego w oparciu o statystyki o rozkładach dokładnych, i że jedynie w modelu losowym istnieje konieczność posłużenia się metodami przybliżonymi. Przyjęcie tego założenia umożliwia zatem przeprowadzenie kompletnej analizy dla szerszej klasy modeli niż modele całkowicie ortogonalne, tzn. modele z jednakową liczbą poziomów czynnika B wewnątrz każdego poziomu czynnika A oraz z jednakową liczbą obserwacji dla każdej kombinacji poziomów tych czynników. Z praktycznego punktu widzenia jest to dość ważne zagadnienie, ponieważ, jak podkreślali wcześniej Arnold (1981) w przypadku modelu stałego oraz Burdick i Graybill (1985) w przypadku modelu losowego, modele nieortogonalne z jednakową liczbą obserwacji są bardzo często stosowane w praktyce.

W dalszych paragrafach pracy wykorzystamy rezultaty dotyczące własności form kwadratowych zmiennych losowych o rozkładach normalnych. Wykorzystamy zatem definicję wartości oczekiwanej formy kwadratowej (patrz np. Rao, 1982, str.238), warunek na to aby forma kwadratowa miała rozkład chi-kwadrat, oraz warunek niezależności dwóch form kwadratowych (patrz np. Rao i Mitra, 1971, §§ 9.2-9.4). Rezultaty te umożliwiają nam określenie rozkładów odpowiednich sum kwadratów z analizy wariancji poszczególnych modeli, oraz konstrukcję potrzebnych statystyk.

Dalej w pracy symbolami $\mathbf{O}$, $\mathbf{1}_a$, $\mathbf{I}_a$, $\mathbf{J}_a$ oznaczać będziemy odpowiednio macierz zerową, (ax1)-wymiarowy wektor jedynek, (axa)-wymiarową macierz jednostkową oraz (axa)-wymiarową macierz o wszystkich elementach równych jeden. Symbolem $\otimes$ oznaczać będziemy iloczyn kroneckerowski macierzy (patrz np. Rao, 1982, str.47), a symbolem $(\operatorname{diag}_{i=1}^{a} \mathbf{B}_i)$ macierz zdefiniowaną następująco

$$(\operatorname{diag}_{i=1}^{a} \mathbf{B}_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}_2 & \cdots & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} & \mathbf{B}_a \end{bmatrix}$$

Ponadto symbolu $\sim$ używać będziemy w miejsce stwierdzenia "ma rozkład", a symboli $\mathcal{N}(\cdot,\cdot)$, $\mathcal{N}_N(\cdot,\cdot)$, χ^2_ν, $\mathcal{F}^{\nu_i}_{\nu_j}$ dla oznaczenia odpowiednio jednowymiarowego rozkładu normalnego, N-wymiarowego rozkładu normalnego, rozkładu chi-kwadrat z ν stopniami swobody oraz rozkładu $\mathcal{F}$ z ν_i stopniami swobody dla licznika i ν_j stopniami swobody dla mianownika.

2. MODEL

Równanie dla zmiennej obserwowanej na k-tej jednostce, potraktowanej j-tym poziomem czynnika B w obrębie i-tego poziomu czynnika A przyjmuje następującą postać

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij} + e_{ijk}, \qquad (2.1)$$
$$i=1,\dots,r, \quad j=1,\dots,s_i, \quad k=1,\dots,n,$$

gdzie μ jest wspólnym parametrem reprezentującym nieznaną średnią ogólną, α_i reprezentuje nieznany efekt i-tego poziomu czynnika A, β_{ij} reprezentuje nieznany efekt j-tego poziomu czynnika B w obrębie i-tego poziomu czynnika A, zaś e_{ijk} reprezentuje efekt błędu losowego na k-tej jednostce kombinacji (i,j).

Niech $\mathbf{y}$ oznacza (Nx1)-wymiarowy wektor zmiennych obserwowanych, gdzie $N = n\sum_{i=1}^{r} s_i$. Wówczas równanie (2.1) można zapisać w postaci macierzowo-wektorowej jako

$$\mathbf{y} = \mathbf{1}_N\mu + \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{B}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e},$$

gdzie $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ oraz $\mathbf{e}$ są wektorami o składowych odpowiednio α_i, β_{ij} oraz e_{ijk}, uporządkowanych leksykograficznie, a macierze $\mathbf{A}$ oraz $\mathbf{B}$ są postaci

$$\mathbf{A} = (\operatorname{diag}_{i=1}^{r} \mathbf{1}_{s_i}) \otimes \mathbf{1}_n$$

$$\mathbf{B} = (\operatorname{diag}_{i=1}^{r} \mathbf{I}_{s_i}) \otimes \mathbf{1}_n$$

Dla wektora $\mathbf{y}$ przyjmiemy założenie, że

$$\mathbf{y} \sim \mathcal{N}_N(\mathbf{Xg}, \mathbf{V}),$$

gdzie $\mathbf{Xg}$ jest wartością oczekiwaną wektora $\mathbf{y}$, $E(\mathbf{y})$, a $\mathbf{V}$ jest (nieujemnie określoną) macierzą dyspersji wektora $\mathbf{y}$. Macierz $\mathbf{X}$ jest macierzą znaną, specyficzną dla danego układu doświadczalnego, a $\mathbf{g}$ jest wektorem parametrów stałych.

Rozbicie sumy kwadratów obserwacji $\mathbf{y}'\mathbf{y}$ na sumy kwadratów dla poszczególnych źródeł zmienności prowadzi do tablicy analizy wariancji przedstawionej w Tabeli 1.

Tabela 1. Analiza wariancji dla podwójnej klasyfikacji hierarchicznej z n obserwacjami w każdej podklasie

Źródło zmienności	Sumy kwadratów	Stopnie swobody	Średnie kwadraty
μ	$\mathbf{y}'\mathbf{P}_0\mathbf{y}$	$\nu_0 = 1$	Q_0
Między poziomami czynnika A	$\mathbf{y}'\mathbf{P}_1\mathbf{y}$	$\nu_1 = r-1$	Q_1
Między poziomami czynnika B wewnątrz poziomów czynnika A	$\mathbf{y}'\mathbf{P}_2\mathbf{y}$	$\nu_2 = \sum_{i=1}^{r} s_i - r$	Q_2
Błąd eksperymentalny	$\mathbf{y}'\mathbf{P}_3\mathbf{y}$	$\nu_3 = N - \sum_{i=1}^{r} s_i$	Q_3
Całość	$\mathbf{y}'\mathbf{y}$	$N = n\sum_{i=1}^{r} s_i$	

Macierze P_o, P_1, P_2 i P_3 występujące w Tabeli 1 są symetryczne, idempotentne i spełniają warunki $P_m P_t = O$, dla $m \neq t$, oraz warunek $\sum_{m=0}^{3} P_m = I_N$. Macierze te są bezpośrednimi uogólnieniami operatorów podanych przez Khuri'ego (1984) i mogą być wyrażone następująco

$$P_o = \frac{1}{N} J_N \quad ,$$

$$P_1 = (\operatorname{diag}_{i=1}^{r} \frac{1}{s_i} J_{s_i}) \otimes \frac{1}{n} J_n - P_o \quad ,$$

$$P_2 = (\operatorname{diag}_{i=1}^{r} [I_{s_i} - \frac{1}{s_i} J_{s_i}]) \otimes \frac{1}{n} J_n$$

i

$$P_3 = (\operatorname{diag}_{i=1}^{r} I_{s_i}) \otimes [I_n - \frac{1}{n} J_n] \quad .$$

Natomiast stopnie swobody ν_o, ν_1, ν_2 i ν_3 podane w Tabeli 1 są odpowiednio śladami tych macierzy, tzn. ν_i = ślad P_i (i=0,1,2,3).

3. MODEL STAŁY

W obecnym paragrafie rozważymy sytuację, gdy eksperymentator zainteresowany jest wpływem określonych poziomów zarówno czynnika A jak i czynnika B na badaną cechę. Uzyskane obserwacje stanowią zatem próbę doświadczalną otrzymaną ze specyficznej populacji generalnej - populacji o ustalonych poziomach obu czynników.

Równanie dla (ijk)-tej obserwowanej zmiennej (potencjalnej obserwacji) można tutaj przedstawić w postaci

$$y_{ijk} = m_{ij} + e_{ijk} \quad , \tag{3.1}$$

gdzie $m_{ij} = E(y_{ijk})$, a e_{ijk} jest zmienną losową o której zakładamy, że ma rozkład normalny $N(0, \sigma_e^2)$, dla $i=1,\dots,r$, $j=1,\dots,s_i$, oraz $k=1,\dots,n$; nadto o zmiennych e_{ijk} zakładamy, że są nieskorelowane, a zatem niezależne. Wartość oczekiwaną m_{ij} można rozpisać w formie modelu liniowego

$$m_{ij} = m_{\cdot\cdot} + (m_{i\cdot} - m_{\cdot\cdot}) + (m_{ij} - m_{i\cdot}) \quad ,$$

gdzie $m_{i\cdot} = (\sum_{j=1}^{s_i} m_{ij})/s_i$, a $m_{\cdot\cdot} = (\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s_i} m_{ij})/\sum_{i=1}^{r} s_i = \sum_{i=1}^{r} s_i m_{i\cdot} / \sum_{i=1}^{r} s_i$.

Po zdefiniowaniu odpowiednio parametrów

$$\mu = m_{\cdot\cdot} \quad ,$$

$$\alpha_i = m_{i\cdot} - m_{\cdot\cdot} \quad , \quad i=1,\dots,r \quad ,$$

$$\beta_{ij} = m_{ij} - m_{i\cdot} \quad , \quad i=1,\dots,r \quad , \quad j=1,\dots,s_i \quad ,$$

równanie (3.1) przyjmuje postać (2.1).

W rozważanym tutaj modelu parametrami są efekt ogólny μ, efekty α_i

poziomów czynnika A, efekty β_{ij} poziomów czynnika B oraz nieznana wariancja błędu σ_e^2.

Wektor wartości oczekiwanych oraz macierz dyspersji (Nx1)-wymiarowego wektora obserwacji $\boldsymbol{y}$ są w tym modelu postaci

$$E(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{X}\boldsymbol{g} = (\boldsymbol{1}_N \vdots \boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{B}) \begin{bmatrix} \mu \\ \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}$$

oraz

$$\boldsymbol{V} = \sigma_e^2 \boldsymbol{I}_N .$$

Wartości oczekiwane średnich kwadratów występujących w tablicy 1 otrzymuje się korzystając ze wzoru $E(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{y}) = \nu_i\sigma_e^2 + \boldsymbol{g}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{X}\boldsymbol{g}$ (patrz Rao, 1982, str.238), co w rozważanym tutaj modelu daje

$$E(Q_o) = N[(\mu+\bar{\alpha}_.) + \bar{\beta}_{..}]^2 + \sigma_e^2 ,$$

$$E(Q_1) = \frac{n}{r-1}\sum_{i=1}^{r} s_i(\alpha_i - \bar{\alpha}_.)^2 + \frac{2n}{r-1}\sum_{i=1}^{r} s_i(\alpha_i - \bar{\alpha}_.)\bar{\beta}_{i.} + \frac{n}{r-1}\sum_{i=1}^{r} s_i(\bar{\beta}_{i.} - \bar{\beta}_{..})^2 + \sigma_e^2 ,$$

$$E(Q_2) = \frac{n}{\sum_{i=1}^{r} s_i - r}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s_i}(\beta_{ij} - \bar{\beta}_{i.})^2 + \sigma_e^2 ,$$

$$E(Q_3) = \sigma_e^2 ,$$

gdzie $\bar{\alpha}_. = (\sum_{i=1}^{r} s_i\alpha_i)/\sum_{i=1}^{r} s_i$, $\bar{\beta}_{i.} = (\sum_{j=1}^{s_i}\beta_{ij})/s_i$,

$$\bar{\beta}_{..} = (\sum_{i=1}^{r} s_i\bar{\beta}_{i.})/\sum_{i=1}^{r} s_i .$$

Przy uwzględnieniu warunków identyfikacyjnych $\sum_{i=1}^{r} s_i\alpha_i = 0$, oraz $\sum_{j=1}^{s_i}\beta_{ij} = 0$, wynikających z definicji parametrów α_i oraz β_{ij} powyższe wartości oczekiwane sprowadzają się do postaci

$$\begin{aligned} E(Q_o) &= N\mu^2 + \sigma_e^2 , \\ E(Q_1) &= \frac{n}{r-1}\sum_{i=1}^{r} s_i\alpha_i^2 + \sigma_e^2 , \qquad (3.2) \\ E(Q_2) &= \frac{n}{\sum_{i=1}^{r} s_i - r}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s_i}\beta_{ij}^2 + \sigma_e^2 , \\ E(Q_3) &= \sigma_e^2 . \end{aligned}$$

Z równości

$$\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{V} = \sigma_e^2\boldsymbol{P}_i , \quad i=0,1,2,3 ,$$

oraz rezultatów Rao i Mitry (1971, §§ 9.2-9.4), wynika, że formy kwadratowe $y'P_0y/\sigma_e^2$, $y'P_1y/\sigma_e^2$ oraz $y'P_2y/\sigma_e^2$ posiadają niecentralne rozkłady chi-kwadrat odpowiednio z $\nu_0=1$, $\nu_1= r-1$ oraz $\nu_2 = \sum_{i=1}^{r} s_i - r$ stopniami swobody i parametrami niecentralności (bez uwzględnienia warunków identyfikacyjnych) odpowiednio

$$g'X'P_0Xg/\sigma_e^2 = N[(\mu+\bar{\alpha}_.) + \bar{\beta}_{..}]^2/\sigma_e^2 ,$$

$$g'X'P_1Xg/\sigma_e^2 = \frac{n}{r-1}[\sum_{i=1}^{r} s_i(\alpha_i - \bar{\alpha}_.)^2 + 2\sum_{i=1}^{r} s_i(\alpha_i-\bar{\alpha}_.)\bar{\beta}_{i.} + \sum_{i=1}^{r} s_i(\bar{\beta}_{i.}-\bar{\beta}_{..})^2]/\sigma_e^2$$

oraz

$$g'X'P_2Xg/\sigma_e^2 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{r} s_i - r}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s_i}(\beta_{ij} - \bar{\beta}_{i.})^2/\sigma_e^2 ,$$

podczas gdy forma kwadratowa $y'P_3y/\sigma^2$ posiada centralny rozkład chi-kwadrat z $\nu_3 = N - \sum_{i=1}^{r} s_i$ stopniami swobody. Dodatkowo z własności $P_mP_t = 0$, dla $m\neq t$, wynika również niezależność tych form kwadratowych (patrz także Rao i Mitra, 1971, §§ 9.2-9.4).

Przy uwzględnieniu warunków identyfikacyjnych parametry niecentralności form kwadratowych $y'P_0y/\sigma_e^2$, $y'P_1y/\sigma_e^2$ oraz $y'P_2y/\sigma_e^2$ sprowadzają się do postaci

$$g'X'P_0Xg/\sigma_e^2 = N\mu^2/\sigma_e^2 ,$$

$$g'X'P_1Xg/\sigma_e^2 = \frac{n}{r-1}\sum_{i=1}^{r} s_i\alpha_i^2/\sigma_e^2$$

oraz

$$g'X'P_2Xg/\sigma_e^2 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{r} s_i - r}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s_i}\beta_{ij}^2/\sigma_e^2 .$$

Przejdziemy obecnie do wyznaczenia ocen punktowych i przedziałowych dla parametrów stałych modelu i dla σ_e^2, a także do testowania hipotez o parametrach stałych. Nasze rozważania będziemy prowadzili przy uwzględnieniu warunków identyfikacyjnych.

Estymatory punktowe dla μ, α_i oraz β_{ij} wyznaczamy metodą najmniejszych kwadratów. Przy uwzględnieniu warunków identyfikacyjnych uzyskujemy oceny

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{...} , \quad \text{gdzie} \quad \bar{y}_{...} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s_i}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} ,$$

$$\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}, \text{ gdzie } \bar{y}_{i..} = \frac{1}{ns_i}\sum_{j=1}^{s_i}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}, \ i=1,...,r, \tag{3.3}$$

$$\hat{\beta}_{ij} = \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..}, \text{ gdzie } \bar{y}_{ij.} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}, \ i=1,...,r, j=1,...,s_i .$$

Ocenę punktową wariancji σ_e^2 uzyskujemy, w wyniku rozwiązania równania

$$E(Q_3) = Q_3 ,$$

w postaci

$$\hat{\sigma}_e^2 = Q_3 . \tag{3.4}$$

W rozważanym modelu stałym mamy do zweryfikowania następujące hipotezy H_A : $\alpha_i = 0$, dla $i=1,\ldots,r$, tzn. hipotezę, że główne efekty czynnika A są równe zeru, oraz hipotezę $H_{B|A}$: $\beta_{ij} = 0$, dla $i=1,\ldots,r$, $j=1,\ldots,s_i$, tzn. hipotezę, że główne efekty czynnika B w obrębie każdego poziomu czynnika A są równe zeru.

Z wcześniejszych rozważań o rozkładach i niezależności odpowiednich form kwadratowych wynika, że przy weryfikowaniu hipotezy H_A należy posłużyć się zmienną losową (statystyką)

$$\mathcal{F}_A = \frac{Q_1}{Q_3} ,$$

która przy prawdziwości H_A ma centralny rozkład $\mathcal{F}$ z ν_1 oraz ν_3 stopniami swobody ($\mathcal{F}^{\nu_1}_{\nu_3}$) , a przy weryfikowaniu hipotezy $H_{B|A}$ należy stosować zmienną losową

$$\mathcal{F}_{B|A} = \frac{Q_2}{Q_3} ,$$

która przy prawdziwości $H_{B|A}$ ma centralny rozkład $\mathcal{F}$ z ν_2 oraz ν_3 stopniami swobody ($\mathcal{F}^{\nu_2}_{\nu_3}$). Hipotezę H_A odrzucamy więc na obranym poziomie istotności α wtedy i tylko wtedy, gdy wartość F_A zmiennej losowej $\mathcal{F}_A$ spełnia nierówność

$$F_A > F_{\alpha;\nu_1,\nu_3} ,$$

a hipotezę $H_{B|A}$ odrzucamy na tym poziomie wtedy i tylko wtedy, gdy wartość $F_{B|A}$ zmiennej losowej $\mathcal{F}_{B|A}$ spełnia nierówność

$$F_{B|A} > F_{\alpha;\nu_2,\nu_3} ,$$

gdzie $F_{\alpha;\nu_1,\nu_3}$ oraz $F_{\alpha;\nu_2,\nu_3}$ są właściwymi dla danego α kwantylami odpowiedniego rozkładu $\mathcal{F}$.

Dla estymacji przedziałowej funkcji parametrów stałych wykorzystamy fakt, że liniowo niezależne wektory $\boldsymbol{\eta}_o = \mathbf{P}_o\mathbf{Xg}$, $\boldsymbol{\eta}_1 = \mathbf{P}_1\mathbf{Xg}$ oraz $\boldsymbol{\eta}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{Xg}$ rozpinają przestrzeń wszystkich estymowalnych funkcji liniowych wektora $\mathbf{g}$ i określimy przedziały ufności dla funkcji $\mathbf{a}'\boldsymbol{\eta}_i$, $i=0,1,2$.

W świetle wcześniejszych stwierdzeń i znanych wyników (patrz, np. Rao i Mitra, 1971, twierdzenie 9.2.1) zauważamy, że

$$(\mathbf{P}_i\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}_i)'(\mathbf{P}_i\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}_i)/\sigma_e^2 \sim \chi^2_{\nu_i} , \quad i=0,1,2 ,$$

oraz, że

$$(\mathbf{P}_i\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}_i)'(\mathbf{P}_i\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}_i)/\nu_i Q_3 \sim \mathcal{F}^{\nu_i}_{\nu_3} , \quad i=0,1,2 .$$

Jednoczesne 100(1-α)%-owe przedziały ufności dla funkcji $\mathbf{a}'\boldsymbol{\eta}_i$ są zatem postaci

$$[\mathbf{a}'\mathbf{P}_i\mathbf{y} - c_i \ , \ \mathbf{a}'\mathbf{P}_i\mathbf{y} + c_i] \ , \quad i=0,1,2, \tag{3.5}$$

gdzie $c_i = (\nu_i Q_3 F_{\alpha;\nu_i,\nu_3} \mathbf{a}'\mathbf{a})^{1/2}$.

Wektory η_o, η_1 i η_2 oraz $\mathbf{P}_o\mathbf{y}$, $\mathbf{P}_1\mathbf{y}$ i $\mathbf{P}_2\mathbf{y}$ można w naszym modelu, przy występujących warunkach identyfikacyjnych, zapisać w postaci

$$\eta_o = \mu \mathbf{1}_N \ , \quad \eta_1 = (\alpha_1\mathbf{1}'_{ns_1}, \alpha_2\mathbf{1}'_{ns_2},\ldots,\alpha_r\mathbf{1}'_{ns_r})' \ ,$$

$$\eta_2 = (\beta_{11}\mathbf{1}'_n , \beta_{12}\mathbf{1}'_n ,\ldots,\beta_{rs_r}\mathbf{1}'_n)' \ , \quad \mathbf{P}_o\mathbf{y} = \hat{\mu}\mathbf{1}_N \ ,$$

$$\mathbf{P}_1\mathbf{y} = (\hat{\alpha}_1\mathbf{1}'_{ns_1}, \hat{\alpha}_2\mathbf{1}'_{ns_2},\ldots,\hat{\alpha}_r\mathbf{1}'_{ns_r})' \ ,$$

$$\mathbf{P}_2\mathbf{y} = (\hat{\beta}_{11}\mathbf{1}'_n , \hat{\beta}_{12}\mathbf{1}'_n,\ldots,\hat{\beta}_{rs_r}\mathbf{1}'_n)'$$

Jeśli we wzorze (3.5) dla i=0 przyjmiemy $\mathbf{a} = \mathbf{1}_N/N$ to określimy przedział ufności dla μ. Odpowiedni dobór wektora $\mathbf{a}$ dla i=1 oraz i=2 pozwala na konstrukcję przedziałów ufności dla funkcji α_m , $m=1,\ldots,r$, $\alpha_m - \alpha_t$, $m,t = 1,\ldots,r$, $\beta_{\ell t}$, $\ell=1,\ldots,m$, $t=1,\ldots,s_\ell$, $\beta_{\ell t} - \beta_{\ell k}$, $\ell=1,\ldots,r$, $t,k=1,\ldots,s_\ell$.

Przy konstrukcji przedziału ufności dla σ_e^2 wykorzystamy wcześniej zauważony fakt, że

$$\mathbf{y}'\mathbf{P}_3\mathbf{y}/\sigma_e^2 \sim \chi^2_{\nu_3} \ .$$

Dobierając stałe h_1 i h_2 tak, aby

$$\mathcal{P}(h_1 \le \chi^2_{\nu_3} \le h_2) = 1-\alpha \ , \tag{3.6}$$

otrzymujemy $100(1-\alpha)$%-owy przedział ufności dla σ_e^2 w postaci

$$\left[\frac{\mathbf{y}'\mathbf{P}_3\mathbf{y}}{h_2} \ , \ \frac{\mathbf{y}'\mathbf{P}_3\mathbf{y}}{h_1} \right] . \tag{3.7}$$

Warunek (3.6) nie wyznacza stałych h_1 oraz h_2 jednoznacznie (patrz, np. Roussas, 1973, str.340). Tradycyjnym sposobem ich ujednoznacznienia jest przyjęcie dodatkowego warunku wyrażającego się równością

$$\mathcal{P}(\chi^2_{\nu_3} > h_2) = \mathcal{P}(\chi^2_{\nu_3} < h_1) \ ,$$

przy którym $h_1 = \chi^2_{\nu_3;1-\alpha/2}$ oraz $h_2 = \chi^2_{\nu_3,\alpha/2}$ odczytuje się z powszechnie dostępnych tablic rozkładu chi-kwadrat. Z uwagi na niesymetrię rozkładu ch-kwadrat takie ustalanie stałych h_1 oraz h_2, choć wygodne w praktyce, nie prowadzi, jak pokazali Tate i Klett (1959) do przedziału najkrótszego. Odpowiednie tablice rozkładu ch-kwadrat umożliwiające praktyczne wyznaczanie przedziału ufności dla wariancji zgodnie z zasadą minimum długości, można znaleźć w pracy wymienionych autorów (dla α=0.1, 0.05, 0.01, 0.005, 0.001 oraz ν=2(1)29). Ponadto dla wyznaczenia h_1 oraz

h_2 dla ν>29 wykorzystać można procedurę Konysa i Molińskiego (1987).

4. MODEL MIESZANY

Rozważmy teraz sytuację, gdy poziomy czynnika B wewnątrz każdego poziomu czynnika A są wybrane z nieskończonej populacji tych poziomów. Przyjmujemy wówczas, że efekty β_{ij} określone w modelu (2.1) są niezależnymi zmiennymi losowymi, każda o rozkładzie $N(0, \sigma^2_{b|a})$ a nadto niezależnymi od zmiennych e_{ijk}, o których także zakładamy, że każda ma rozkład $N(0, \sigma^2_e)$ $(i=1,\ldots,r,\ j=1,\ldots,s_i,\ k=1,\ldots,n)$.

Wówczas równanie dla obserwacji y_{ijk} daje się zapisać jako

$$y_{ijk} = m_i + \beta_{ij} + e_{ijk} ,$$

gdzie

$$m_i = E(y_{ijk}) = m_. + (m_i - m_.) ,$$

przy czym $m_. = (\sum_{i=1}^{r} s_i m_i)/\sum_{i=1}^{r} s_i$. Definiując teraz odpowiednio parametry,

$$\mu = m_. ,\qquad \alpha_i = m_i - m_. , \tag{4.1}$$

uzyskujemy model wyrażający się postacią (2.1).

Wektor wartości oczekiwanych oraz macierz dyspersji dla (Nx1)-wymiarowego wektora obserwacji $\mathbf{y}$ są w tym modelu postaci

$$E(\mathbf{y}) = \mathbf{X}\mathbf{g} = (\mathbf{1}_N : \mathbf{A}) \begin{bmatrix} \mu \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} ,$$

$$\mathbf{V} = \sigma^2_{b|A}\mathbf{B}\mathbf{B}' + \sigma^2_e\mathbf{I}_N = \sigma^2_{b|A}[(\operatorname{diag}_{i=1}^{r} \mathbf{I}_{s_i}) \otimes \mathbf{J}_n] + \sigma^2_e\mathbf{I}_N .$$

Wartości oczekiwane średnich kwadratów dają się teraz wyrazić (patrz ponownie Rao, 1982, str.238) wzorami

$$E(Q_0) = N(\mu+\bar{\alpha}_.)^2 + n\sigma^2_{b|A} + \sigma^2_e ,$$
$$E(Q_1) = \frac{n}{r-1}\sum_{i=1}^{r} s_i(\alpha_i - \bar{\alpha}_.)^2 + n\sigma^2_{b|A} + \sigma^2_e ,$$
$$E(Q_2) = n\sigma^2_{b|A} + \sigma^2_e ,$$
$$E(Q_3) = \sigma^2_e ,$$

gdzie $\bar{\alpha}_. = (\sum_{i=1}^{r} s_i\alpha_i)/\sum_{i=1}^{r} s_i$. Warunek identyfikacyjny $\sum_{i=1}^{r} s_i\alpha_i = 0$, wynikający z definicji (4.1) parametrów, sprowadza powyższe wzory do postaci

$$E(Q_0) = N\mu^2 + n\sigma^2_{b|A} + \sigma^2_e ,$$
$$E(Q_1) = \frac{n}{r-1}\sum_{i=1}^{r} s_i\alpha_i^2 + n\sigma^2_{b|A} + \sigma^2_e , \tag{4.2}$$
$$E(Q_2) = n\sigma^2_{b|A} + \sigma^2_e ,$$
$$E(Q_3) = \sigma^2_e .$$

Niech $\xi = n\,\sigma^2_{b|A} + \sigma^2_e$. Łatwo zauważyć, że

$$P_i V = \xi\, P_i \quad , \quad i=0,1,2 \; ,$$
$$P_3 V = \sigma^2_e\, P_3 \quad .$$

Z powyższych faktów oraz rezultatów Rao i Mitry (1971, §§ 9.2-9.4), wynika, że formy kwadratowe $y'P_o y/\xi$ oraz $y'P_1 y/\xi$ posiadają niecentralne rozkłady chi-kwadrat z ν_o oraz ν_1 stopniami swobody i parametrami niecentralności (bez uwzględnienia warunków identyfikacyjnych) odpowiednio

$$g'X'P_o Xg/\xi = N(\mu+\bar{\alpha}_.)^2/\xi$$

oraz

$$g'X'P_1 Xg/\xi = \frac{n}{r-1}\sum_{i=1}^{r} s_i(\alpha_i-\bar{\alpha}_.)^2/\xi \quad ,$$

podczas gdy formy kwadratowe $y'P_2 y/\xi$ oraz $y'P_3 y/\sigma^2_e$ mają centralne rozkłady chi-kwadrat z ν_2 oraz ν_3 stopniami swobody odpowiednio. Ponadto z tych samych faktów oraz z warunku $P_m P_t = 0$, dla $m\neq t$, wynika niezależność wszystkich form kwadratowych.

Przy uwzględnieniu warunków identyfikacyjnych parametry niecentralności form kwadratowych $y'P_o y/\xi$ oraz $y'P_1 y/\xi$ sprowadzają się do postaci

$$g'X'P_o Xg/\xi = N\mu^2/\xi$$

oraz

$$g'X'P_1 Xg/\xi = \frac{n}{r-1}\sum_{i=1}^{r} s_i \alpha_i^2/\xi \quad .$$

Parametrami w obecnym modelu są parametry stałe μ i α_i oraz komponenty wariancyjne $\sigma^2_{b|A}$ i σ^2_e.

Estymatory punktowe parametrów stałych otrzymane uogólnioną metodą najmniejszych kwadratów (patrz np. Searle, 1971, str.87) oraz komponentów wariancyjnych otrzymane metodą analizy wariancji (patrz np. Searle, 1971, str. 475-476) dostarczają tutaj ocen postaci

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{...} \quad ,$$
$$\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...} \quad , \quad i=1,\ldots,r,$$
$$\hat{\sigma}^2_{b|A} = \frac{1}{n}(Q_2-Q_3) \tag{4.3}$$

i

$$\hat{\sigma}^2_e = Q_3 \quad ,$$

gdzie $\bar{y}_{i..}$ oraz $\bar{y}_{...}$ są zdefiniowane jak w paragrafie poprzednim. Dodatkowo w tym modelu interesujące są oceny punktowe ilorazu komponentów wariancyjnych $\gamma = \sigma^2_{b|A}/\sigma^2_e$ oraz współczynnika korelacji wewnątrzklasowej $\rho = \sigma^2_{b|A}/(\sigma^2_{b|A}+\sigma^2_e)$ będącego miarą stopnia zależności dwóch obserwacji z tego samego j-tego poziomu czynnika B wewnątrz i-tego poziomu czynnika A (patrz np. Kempthorne, 1957, str.228, 243-244). Oceny tych funkcji uzyskujemy wstawiając we wzorach je definiujących w miejsce komponentów wariancyjnych ich oceny, mianowicie

$$\hat{\gamma} = \hat{\sigma}^2_{b|A}/\hat{\sigma}^2_e$$
$$\hat{\rho} = \hat{\sigma}^2_{b|A}/(\hat{\sigma}^2_{b|A} + \hat{\sigma}^2_e) \quad . \tag{4.4}$$

W modelu mieszanym interesujące są hipotezy

$$H_A : \alpha_i = 0 \quad , \text{ dla } i=1,\ldots,r \quad \text{oraz } H_{b|A} : \sigma^2_{b|A} = 0 \quad .$$

Na mocy rozważań o niezależności i rozkładach form kwadratowych jako funkcję testową dla testowania hipotezy H_A stosujemy zmienną losową (statystykę)

$$\mathcal{F}_A = \frac{Q_1}{Q_2} .$$

Ma ona przy prawdziwości H_A rozkład centralny $\mathcal{F}^{\nu_1}_{\nu_2}$. Hipotezę H_A odrzucamy więc na obranym poziomie istotności α wtedy i tylko wtedy, gdy wartość F_A statystyki $\mathcal{F}_A$ jest większa od $F_{\alpha;\nu_1,\nu_2}$.
Hipotezę $H_{b|A}$ weryfikujemy w oparciu o statystykę

$$\mathcal{F}_{b|A} = \frac{Q_2}{Q_3} \quad ,$$

która ma rozkład $\dfrac{n\,\sigma^2_{b|A} + \sigma^2_e}{\sigma^2_e}\,\mathcal{F}^{\nu_2}_{\nu_3}$, a przy prawdziwości hipotezy $H_{b|A}$ ma rozkład $\mathcal{F}^{\nu_2}_{\nu_3}$. Hipotezę tę odrzucamy więc na poziomie α wtedy i tylko wtedy, gdy wartść $F_{b|A}$ statystyki $\mathcal{F}_{b|A}$ jest większa od $F_{\alpha;\nu_2,\nu_3}$.

Wzorem poprzedniego paragrafu estymację przedziałową funkcji liniowych wektora efektów stałych opieramy tutaj o estymację funkcji postaci $\mathbf{a}'\boldsymbol{\eta}_i$, $i=0,1$, gdzie $\boldsymbol{\eta}_o = \mathbf{P}_o\mathbf{X}\mathbf{g}$, $\boldsymbol{\eta}_1 = \mathbf{P}_1\mathbf{X}\mathbf{g}$. W rozważanym obecnie modelu zachodzą relacje

$$(\mathbf{P}_i\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}_i)'(\mathbf{P}_i\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}_i)/\xi \sim \chi^2_{\nu_i} \quad i=0,1 ,$$
$$E(Q_2) = \xi \quad ,$$
$$(\mathbf{P}_i\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}_i)'(\mathbf{P}_i\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}_i)/\nu_i Q_2 \sim \mathcal{F}^{\nu_i}_{\nu_2} \quad , \quad i=0,1 .$$

Jednoczesny 100(1-α)%-owy przedział ufności dla funkcji $\mathbf{a}'\boldsymbol{\eta}_i$ jest postaci

$$[\mathbf{a}'\mathbf{P}_i\mathbf{y} - c_i \ , \ \mathbf{a}'\mathbf{P}_i\mathbf{y} + c_i] \quad , \quad i=0,1 \ , \tag{4.5}$$

gdzie $c_i = (\nu_i Q_2 \ F_{\alpha;\nu_i,\nu_2} \ \mathbf{a}'\mathbf{a})^{1/2}$. Z uwagi na to, że $\boldsymbol{\eta}_o = \mu\,\mathbf{1}_N$, $\boldsymbol{\eta}_1 = (\alpha_1\mathbf{1}'_{ns_1}, \alpha_2\mathbf{1}'_{ns_2}, \ldots, \alpha_r\mathbf{1}'_{ns_r})'$, $\mathbf{P}_o\mathbf{y} = \hat{\mu}\,\mathbf{1}_N$, $\mathbf{P}_1\mathbf{y} = (\hat{\alpha}_1\mathbf{1}'_{ns_1}, \hat{\alpha}_2\mathbf{1}'_{ns_2}, \ldots, \hat{\alpha}_r\mathbf{1}'_{ns_r})'$, ze wzoru (4.5) uzyskujemy dla i=0 i $\mathbf{a} = \mathbf{1}_N/N$ przedział ufności dla μ, a dla i=1 i odpowiedniego $\mathbf{a}$ jednoczesne przedziały ufności dla funkcji α_m, $m=1,\ldots,r$ lub $\alpha_m - \alpha_\ell$, $m,\ell = 1,\ldots,r$.

Przedział ufności dla liniowej funkcji komponentów wariancyjnych $\mathbf{p}'\boldsymbol{\sigma} = p_1\sigma^2_{b|A} + p_2\sigma^2_e$ wyprowadzimy w oparciu o znajomość przedziałów ufności dla $\xi = n\,\sigma^2_{b|A} + \sigma^2_e$ oraz σ^2_e. Na mocy wcześniejszych rozważań o rozkładach form kwadratowych $\mathbf{y}'\mathbf{P}_2\mathbf{y}/\xi$ oraz $\mathbf{y}'\mathbf{P}_3\mathbf{y}/\sigma^2_e$, $100(1-\alpha)\%$-owe przedziały ufności dla ξ oraz σ^2_e są odpowiednio postaci

$$\left[\frac{\mathbf{y}'\mathbf{P}_2\mathbf{y}}{h_{22}}\,,\ \frac{\mathbf{y}'\mathbf{P}_2\mathbf{y}}{h_{21}}\right],$$
$$\left[\frac{\mathbf{y}'\mathbf{P}_3\mathbf{y}}{h_{32}}\,,\ \frac{\mathbf{y}'\mathbf{P}_3\mathbf{y}}{h_{31}}\right], \tag{4.6}$$

gdzie h_{21}, h_{22}, h_{31}, h_{32} spełniają warunki

$$\mathcal{P}(h_{21} \le \chi^2_{\nu_2} \le h_{22}) = 1-\alpha\ ,$$
$$\mathcal{P}(h_{31} \le \chi^2_{\nu_3} \le h_{32}) = 1-\alpha\ .$$

Zależność między wartościami oczekiwanymi średnich kwadratów Q_2 i Q_3 i komponentami wariancyjnymi $\sigma^2_{b|A}$ oraz σ^2_e postaci

$$\begin{bmatrix}\xi\\ \sigma^2_e\end{bmatrix} = \mathbf{K}\begin{bmatrix}\sigma^2_{b|A}\\ \sigma^2_e\end{bmatrix},$$

gdzie

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} n & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

prowadzi do przedstawienia funkcji $\mathbf{p}'\boldsymbol{\sigma}$ jako liniowej kombinacji ξ i σ^2_e postaci

$$\mathbf{p}'\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{p}'\mathbf{K}^{-1}\begin{bmatrix}\xi\\ \sigma^2_e\end{bmatrix} = \frac{p_1}{n}\,\xi + \left(p_2 - \frac{p_1}{n}\right)\sigma^2_e\ .$$

Na mocy Khuri'ego (1981) (patrz także Molińska, Moliński (1988)) konserwatywny $100(1-\alpha)^2\%$-owy przedział ufności tzn. przedział o współczynniku ufności nie mniejszym niż $(1-\alpha)^2$, dla $\mathbf{p}'\boldsymbol{\sigma}$, jest dany wzorem

$$\left[\frac{p_1}{n}\frac{\mathbf{y}'\mathbf{P}_2\mathbf{y}}{h_{22}} + \left(p_2 - \frac{p_1}{n}\right)\frac{\mathbf{y}'\mathbf{P}_2\mathbf{y}}{h_{32}}\,,\ \frac{p_1}{n}\frac{\mathbf{y}'\mathbf{P}_2\mathbf{y}}{h_{21}} + \left(p_2 - \frac{p_1}{n}\right)\frac{\mathbf{y}'\mathbf{P}_3\mathbf{y}}{h_{31}}\right],\ \text{gdy } p_1 \ge 0,\ p_2 > \frac{p_1}{n},$$

$$\left[\frac{p_1}{n}\frac{\mathbf{y}'\mathbf{P}_2\mathbf{y}}{h_{22}} + \left(p_2 - \frac{p_1}{n}\right)\frac{\mathbf{y}'\mathbf{P}_3\mathbf{y}}{h_{31}}\,,\ \frac{p_1}{n}\frac{\mathbf{y}'\mathbf{P}_2\mathbf{y}}{h_{21}} + \left(p_2 - \frac{p_1}{n}\right)\frac{\mathbf{y}'\mathbf{P}_3\mathbf{y}}{h_{32}}\right],\ \text{gdy } p_1 \ge 0,\ p_2 < \frac{p_1}{n}, \tag{4.7}$$

$$\left[\frac{p_1}{n}\frac{\mathbf{y}'\mathbf{P}_2\mathbf{y}}{h_{21}} + \left(p_2 - \frac{p_1}{n}\right)\frac{\mathbf{y}'\mathbf{P}_3\mathbf{y}}{h_{32}}\,,\ \frac{p_1}{n}\frac{\mathbf{y}'\mathbf{P}_2\mathbf{y}}{h_{22}} + \left(p_2 - \frac{p_1}{n}\right)\frac{\mathbf{y}'\mathbf{P}_3\mathbf{y}}{h_{31}}\right],\ \text{gdy } p_1 \le 0,\ p_2 > \frac{p_1}{n},$$

$$\left[\frac{p_1}{n}\frac{\mathbf{y}'\mathbf{P}_2\mathbf{y}}{h_{21}} + \left(p_2 - \frac{p_1}{n}\right)\frac{\mathbf{y}'\mathbf{P}_3\mathbf{y}}{h_{31}}\,,\ \frac{p_1}{n}\frac{\mathbf{y}'\mathbf{P}_2\mathbf{y}}{h_{22}} + \left(p_2 - \frac{p_1}{n}\right)\frac{\mathbf{y}'\mathbf{P}_3\mathbf{y}}{h_{32}}\right],\ \text{gdy } p_1 \le 0,\ p_2 < \frac{p_1}{n}.$$

Przedział ufności dla $\gamma = \sigma^2_{b|A}/\sigma^2_e$ wyznaczamy korzystając z faktu, że zmienna losowa $(n\gamma + 1)\frac{Q_3}{Q_2}$ ma rozkład $\mathcal{F}^{\nu_3}_{\nu_2}$. Dobierając stałe f_1 oraz f_2 tak, aby spełniona była równość

$$\mathcal{P}(f_1 \le \mathcal{F}^{\nu_3}_{\nu_2} \le f_2) = 1-\alpha \ ,$$

otrzymamy 100(1-α)%-owy przedział ufności dla γ postaci

$$\left[\frac{1}{n}\left[\frac{Q_2}{Q_3}f_1 - 1\right] \ , \ \frac{1}{n}\left[\frac{Q_2}{Q_3}f_2 - 1\right]\right] . \qquad (4.8)$$

Zgodnie z uwagami poczynionymi w końcu poprzedniego paragrafu odpowiedni dobór stałych h_{21}, h_{22}, h_{31} i h_{32} we wzorach (4.6) i (4.7) oraz stałych f_1 i f_2 we wzorze (4.8) pozwala na ujednoznacznienie odpowiednich przedziałów ufności. Jak zauważono dobór stałych h_{21}, h_{22}, h_{31} i h_{32} z tradycyjnych tablic rozkładu chi-kwadrat nie zapewnia konstrukcji optymalnego przedziału. W konstrukcji przedziału zgodnie z zasadą minimum długości należy wykorzystać tablice Tate'a i Kletta (1959). Dodatkowo należy zwrócić uwagę na to, że oparcie konstrukcji przedziału (4.7) na najkrótszych przedziałach ufności dla ξ i σ^2_e daje przedział najkrótszy w całej rodzinie przedziałów ufności dla funkcji $\mathbf{p}'\boldsymbol{\sigma}$ (patrz Moliński, 1985).

Z uwagi na niesymetrię rozkładu $\mathcal{F}$ wykorzystywanego w konstrukcji przedziału (4.8) nie uzyskamy optymalnego przedziału dla ilorazu γ jeśli wybierzemy stałe f_1 i f_2 z tradycyjnych tablic rozkładu $\mathcal{F}$, tj. jeśli przyjmiemy $f_1 = F_{1-\alpha/2;\nu_3,\nu_2}$ i $f_2 = F_{\alpha/2,\nu_3\nu_2}$. W konstrukcji najkrótszego przedziału ufności dla ilorazu γ można wykorzystać tablice Kali i Molińskiego (1984) (dla α=0.01 i α=0.05) lub Molińskiego (1985) (dla α=0.01, 0.02, 0.05, 0.10, 0.20).

W estymacji przedziałowej współczynnika korelacji wewnątrzklasowej ρ wykorzystamy przedział ufności (4.8). Na mocy faktu, że $\rho = \frac{\gamma}{\gamma+1}$ jest funkcją rosnącą γ, 100(1-α)%-owy przedział ufności dla ρ jest postaci

$$\left[\frac{\min\gamma}{\min\gamma+1} \ , \ \frac{\max\gamma}{\max\gamma+1}\right] \ , \qquad (4.9)$$

gdzie $\min\gamma$ oraz $\max\gamma$ jest odpowiednio dolną oraz górną granicą przedziału (4.8).

Tutaj należy podkreślić, że brak jest korespondencji między długościami przedziałów (4.8) i (4.9). Z uwagi na specyficzną postać zależności między ρ i γ oparcie konstrukcji przedziału (4.9) o najkrótszy przedział ufności dla γ nie prowadzi do najkrótszego przedziału dla ρ (patrz Moliński, 1985).

5. MODEL LOSOWY

W tym paragrafie przyjmiemy, że poziomy czynnika A są wybrane losowo z pewnej nieskończonej populacji tych poziomów oraz, że poziomy czynnika B wewnątrz każdego z poziomów czynnika A są również wybrane z odpowiednich nieskończonych populacji tych poziomów. Przyjmiemy zatem założenie, że α_i, β_{ij} oraz e_{ijk} w (2.1) dla wszystkich wskaźników i, j, k są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych z zerowymi wartościami oczekiwanymi i wariancjami odpowiednio równymi σ_a^2, $\sigma_{b|a}^2$ oraz σ_e^2.

Wektor wartości oczekiwanych oraz macierz dyspersji wektora obserwacji y są zatem postaci

$$E(y) = \mu \mathbf{1}_N ,$$

$$V = \sigma_a^2 A A' + \sigma_{b|a}^2 B B' + \sigma_e^2 I_N$$

$$= \sigma_a^2 [(\operatorname{diag}_{i=1}^{r} J_{s_i}) \otimes J_n] + \sigma_{b|a}^2 [(\operatorname{diag}_{i=1}^{r} I_{s_i}) \otimes J_n] + \sigma_e^2 I_N .$$

Wartości oczekiwane średnich kwadratów z tablicy analizy wariancji są w tym modelu (patrz jeszcze raz Rao, 1982, str.238) postaci

$$\begin{aligned} E(Q_0) &= N\mu^2 + k_0\sigma_a^2 + n\sigma_{b|a}^2 + \sigma_e^2 , \\ E(Q_1) &= \frac{k_1}{r-1}\sigma_a^2 + n\sigma_{b|a}^2 + \sigma_e^2 , \\ E(Q_2) &= n\sigma_{b|a}^2 + \sigma_e^2 , \\ E(Q_3) &= \sigma_e^2 , \end{aligned} \tag{5.1}$$

gdzie $k_0 = n(\sum_{i=1}^{r} s_i^2)/\sum_{i=1}^{r} s_i$, $k_1 = N - n(\sum_{i=1}^{r} s_i^2)/\sum_{i=1}^{r} s_i$.

Parametrami w tym modelu są stała μ oraz komponenty wariancyjne σ_a^2, $\sigma_{b|a}^2$ i σ_e^2.

W rozważanej w tym paragrafie sytuacji (s_i, i=1,..,r, nie są równe) najlepszy estymator punktowy parametru μ nie istnieje (patrz Zyskind, 1967). Przyjmiemy zatem postępowanie przybliżone, polegające na przyjęciu oceny punktowej parametru μ postaci

$$\hat{\mu} = \bar{y} . \tag{5.2}$$

Należy podkreślić, że ocena otrzymana zgodnie z (5.2) nie jest najlepsza. Warto jednak zauważyć, że przy s_i, i=1,...,r, niewiele różniących się między sobą ocena ta będzie w przybliżeniu najlepsza i przybliżenie to będzie dobre.

Estymatory punktowe komponentów wariancyjnych otrzymane metodą analizy wariancji (patrz Searle, 1971, str.475-476) dostarczają tutaj ocen wyrażonych wzorami

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_a^2 &= \frac{r-1}{k_1}(Q_1 - Q_2) , \\ \hat{\sigma}_{b|a}^2 &= \frac{1}{n}(Q_2 - Q_3) , \\ \hat{\sigma}_e^2 &= Q_3 . \end{aligned} \tag{5.3}$$

Dodatkowo w obecnym modelu interesujące są oceny współczynników korelacji wewnątrzklasowych. Stopień zależności dwóch obserwacji z tego samego j-tego poziomu czynnika B w obrębie i-tego poziomu czynnika A mierzymy współczynnikiem

$$\rho_1 = \frac{\sigma_a^2 + \sigma_{b|a}^2}{\sigma_a^2 + \sigma_{b|a}^2 + \sigma_e^2},$$

zaś miarę stopnia zależności dwóch obserwacji z różnych poziomów czynnika B w obrębie i-tego poziomu czynnika A uzyskujemy ze wzoru

$$\rho_2 = \frac{\sigma_a^2}{\sigma_a^2 + \sigma_{b|a}^2 + \sigma_e^2}$$

(patrz np. Kempthorne, 1957. str.243-244). Oceny punktowe współczynników ρ_1 i ρ_2 uzyskujemy na drodze zastąpienia w powyższych wzorach komponentów wariancyjnych ich ocenami tj. ze wzorów

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\hat{\sigma}_a^2 + \hat{\sigma}_{b|a}^2}{\hat{\sigma}_a^2 + \hat{\sigma}_{b|a}^2 + \hat{\sigma}_e^2},$$

$$\hat{\rho}_2 = \frac{\hat{\sigma}_a^2}{\hat{\sigma}_a^2 + \hat{\sigma}_{b|a}^2 + \hat{\sigma}_e^2} \tag{5.4}$$

W rozważanym obecnie modelu formy kwadratowe $y'P_2y/\xi$ oraz $y'P_3y/\sigma_e^2$, gdzie $\xi = n\sigma_{b|a}^2 + \sigma_e^2$, mają niezależne centralne rozkłady chi-kwadrat odpowiednio z ν_2 oraz ν_3 stopniami swobody, podczas gdy $y'P_oy/\lambda_o$ oraz $y'P_1y/\lambda_1$, gdzie $\lambda_o = k_o\sigma_a^2 + n\sigma_{b|a}^2 + \sigma_e^2$, $\lambda_1 = \frac{k_1}{r-1}\sigma_a^2 + n\sigma_{b|a}^2 + \sigma_e^2$ nie posiadają rozkładu chi-kwadrat o ile nie jest spełniony warunek $s_1 = s_2 = \ldots = s_r$. Ponieważ w pracy dopuszcza się różność liczebności s_i, $i=1,\ldots,r$, więc w celu skonstruowania statystyk o rozkładach $\mathcal{F}$ proponujemy przyjęcie pewnego uproszczenia. Uproszczenie to będzie polegało na zastąpieniu k_o i $k_1/(r-1)$ we wzorach (5.1) przez wspólną wartość $n\bar{s}$, gdzie $\bar{s} = \sum_{i=1}^{r} s_i/r$ i postępowaniu tak jakby w macierzy $\mathbf{V}$ wszystkie s_i, $i=1,\ldots,r$, były jednakowe, równe $\bar{s}$. Wówczas

$$\mathbf{P}_o\bar{\mathbf{V}} = \lambda\mathbf{P}_o\ ,$$
$$\mathbf{P}_1\bar{\mathbf{V}} = \lambda\mathbf{P}_1 \tag{5.5}$$

gdzie $\lambda = n\bar{s}\,\sigma_a^2 + n\sigma_{b|a}^2 + \sigma_e^2$, a $\bar{\mathbf{V}}$ jest macierzą powstałą z macierzy $\mathbf{V}$ przez zastąpienie wszystkich s_i, $i=1,\ldots,r$, przez $\bar{s}$. Wartości oczekiwane średnich kwadratów Q_o oraz Q_1 można zatem aproksymować następująco

$$E(Q_o) = N\mu^2 + n\bar{s}\,\sigma_a^2 + n\sigma_{b|a}^2 + \sigma_e^2$$
$$E(Q_1) = n\bar{s}\,\sigma_a^2 + n\sigma_{b|a}^2 + \sigma_e^2\ . \tag{5.6}$$

W świetle przyjętych powyżej uproszczeń można przyjąć, że forma kwadratowa $y'P_o y/\lambda$ ma aproksymacyjny rozkład chi-kwadrat z ν_o stopniami swobody i parametrem niecentralności $N\mu^2/\lambda$, a forma kwadratowa $y'P_1 y/\lambda$ ma centralny aproksymacyjny rozkład chi-kwadrat z ν_1 stopniami swobody. Dodatkowo z (5.5) oraz warunku $P_i P_j = 0$, $i,j = 0,1,2,3$, $i \neq j$, wynika niezależność wszystkich form kwadratowych.

W modelu losowym weryfikować będziemy hipotezy $H_a: \sigma_a^2 = 0$ oraz $H_{b|a}: \sigma_{b|a}^2 = 0$. Pierwszą z nich weryfikować będziemy w oparciu o statystykę

$$\mathcal{F}_a = \frac{Q_1}{Q_2},$$

drugą natomiast w oparciu o statystykę

$$\mathcal{F}_{b|a} = \frac{Q_2}{Q_3}.$$

Statystyka $\mathcal{F}_a$ posiada aproksymacyjny rozkład $\frac{\lambda}{\xi}\mathcal{F}_{\nu_2}^{\nu_1}$, a przy prawdziwości hipotezy H_a, rozkład $\mathcal{F}_{\nu_2}^{\nu_1}$ (patrz np. Tietjen, 1974). Hipotezę H_a odrzucamy na ustalonym poziomie istotności α wtedy i tylko wtedy, gdy wartość F_a zmiennej losowej $\mathcal{F}_a$ spełnia nierówność

$$F_a > F_{\alpha;\nu_1,\nu_2}.$$

Przy weryfikacji hipotezy $H_{b|a}$ postępujemy jak w modelu mieszanym.

Przejdziemy obecnie do omówienia zagadnienia estymacji przedziałowej parametrów modelu. Przedział ufności dla μ wyprowadzimy w oparciu o (5.5) oraz fakty wynikające z ustaleń o rozkładach i niezależności form kwadratowych, mianowicie

$$(P_o y - \mu 1_N)'(P_o y - \mu 1_N)/\lambda \sim \chi^2_{\nu_o} \quad \text{(aproksymacyjny)}$$

$$E(Q_1) = \lambda$$

$$(P_o y - \mu 1_N)'(P_o y - \mu 1_N)/Q_1 \sim \mathcal{F}_{\nu_1}^{\nu_o} \quad \text{(aproksymacyjny)}$$

W rezultacie $100(1-\alpha)$%-owy aproksymacyjny przedział ufności dla μ jest postaci

$$[a'P_o y - c_o \ , \ a'P_o y + c_o],$$

gdzie $a = 1_N/N$, $c_o = (\nu_o Q_1 F_{\alpha;\nu_o,\nu_1} a'a)^{1/2} = t_{\alpha/2;\nu_1}\sqrt{Q_1/N}$, która po uwzględnieniu faktu, że $P_o y = \hat{\mu} 1_N$ można zapisać wprost jako

$$[\hat{\mu} - t_{\alpha/2;\nu_1}\sqrt{Q_1/N} \ , \ \hat{\mu} + t_{\alpha/2;\nu_1}\sqrt{Q_1/N}]. \qquad (5.7)$$

Przedziały ufności dla funkcji liniowej komponentów wariancyjnych $p'\sigma = p_1\sigma_a^2 + p_2\sigma_{b|a}^2 + p_3\sigma_e^2$ wyprowadzimy w oparciu o znajomość przedziałów ufności dla wartości oczekiwanych średnich kwadratów w (5.6) dla λ oraz w

(5.1) dla ξ i σ_e^2. 100(1-α)%-owe przedziały ufności dla tych wielkości są postaci

$$\left[\frac{y'P_1y}{h_{12}}\ ,\ \frac{y'P_1y}{h_{11}}\right],\ \text{(aproksymacyjny)}$$

$$\left[\frac{y'P_1y}{h_{12}}\ ,\ \frac{y'P_1y}{h_{11}}\right],\qquad (5.8)$$

$$\left[\frac{y'P_1y}{h_{12}}\ ,\ \frac{y'P_1y}{h_{11}}\right],$$

gdzie h_{11}, h_{12} są tak dobrane, aby

$$P(h_{11} \le \chi^2_{\nu_1} \le h_{12}) = 1-\alpha\ ,$$

a h_{21}, h_{22}, h_{31}, h_{32} są zdefiniowane jak w modelu mieszanym.

Zależność między komponentami wariancyjnymi a wartościami oczekiwanymi średnich kwadratów może być przedstawiona w macierzowo-wektorowej formie jako

$$\begin{bmatrix}\lambda\\ \xi\\ \sigma_e^2\end{bmatrix} = L\begin{bmatrix}\sigma_a^2\\ \sigma_{b|a}^2\\ \sigma_e^2\end{bmatrix},$$

gdzie

$$L = \begin{bmatrix} n\bar{s}. & n & 1\\ 0 & n & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Funkcję $p'\sigma$ można wówczas przedstawić w postaci kombinacji liniowej λ, ξ i σ_e^2 jako

$$p'\sigma = p'L^{-1}\begin{bmatrix}\lambda\\ \xi\\ \sigma_e^2\end{bmatrix} = d'\begin{bmatrix}\lambda\\ \xi\\ \sigma_e^2\end{bmatrix},$$

gdzie

$$d = \left(\frac{p_1}{n\bar{s}.}\ ,\ \frac{p_2}{n} - \frac{p_1}{n\bar{s}.}\ ,\ p_3 - \frac{p_2}{n}\right)'.$$

Niech $T_1 = \{i : d_i > 0\}$ a $T_2 = \{i : d_i < 0\}$, $T_1 \cup T_2 = T$. W świetle rezultatów Khuri'ego (1981) konserwatywny, tj. co najmniej $100(1-\alpha)^{n(T)}$%-owy przedział ufności dla funkcji $p'\sigma$ jest postaci

$$[\min p'\sigma\ ,\ \max p'\sigma]\ ,\qquad (5.9)$$

gdzie

$$\min p'\sigma = \sum_{i\in T_1} d_i \frac{y'P_i y}{h_{i2}} + \sum_{i\in T_2} d_i \frac{y'P_i y}{h_{i1}},$$

$$\max p'\sigma = \sum_{i\in T_1} d_i \frac{y'P_i y}{h_{i1}} + \sum_{i\in T_2} d_i \frac{y'P_i y}{h_{i2}},$$

a $n(T)$ oznacza liczebność zbioru T.

Uwagi poczynione w paragrafach poprzednich w odniesieniu do sposobu ujednoznaczniania przedziałów ufności, w konstrukcji których wykorzystuje się niesymetryczny rozkład chi-kwadrat, stosują się również tutaj w odniesieniu do wzorów (5.8) i (5.9).

6. PRZYKŁAD

Opisane w paragrafach 3, 4 i 5 metody zilustrujemy na przykładzie z zakresu hodowli roślin. W doświadczeniu badano wysokość słonecznika u potomstwa powstałego ze skrzyżowania homozygotycznych linii ojcowskich z homozygotycznymi liniami matecznymi. Uwzględniono trzy linie ojcowskie, przy czym dla pierwszej linii badano potomstwo pochodzące ze skrzyżowania z trzema liniami matecznymi, a dla dwóch pozostałych ze skrzyżowania z czterema liniami matecznymi. Dobór różnych linii matecznych do odpowiednich linii ojcowskich uwarunkowany był jednakowym terminem kwitnienia roślin w tych liniach. Dla każdej krzyżówki linii uwzględniono cztery powtórzenia (replikacje), przedstawiające pomiary średniej wysokości z 7 roślin na czterech poletkach doświadczalnych. Wyniki pomiarów zestawione są w Tabeli 2.

Przyjmując założenie o normalności rozkładu obserwowanych zmiennych, za podstawę analizy opisanego eksperymentu weźmiemy model (2.i), w którym linie ojcowskie reprezentują czynnik A, a linie mateczne czynnik B "zagnieżdżony" w A. Mamy zatem $r=3$, $s_1=3$, $s_2=4$, $s_3=4$, $n=4$ oraz $N=44$. W rezultacie analizy wariancji przeprowadzonej zgodnie ze wzorami z Tabeli 1 uzyskamy wyniki zawarte w Tabeli 3.

Przejdziemy obecnie do szczegółowej analizy eksperymentu. Jeśli przyjmiemy, że będziemy wnioskować dokładnie o tych poziomach czynników A i B, które występują w eksperymencie, to dalsza analiza eksperymentu przeprowadzona będzie zgodnie z rozważaniami zamieszczonymi w paragrafie 3, tj. w modelu stałym.

Wartości oczekiwane średnich kwadratów z Tabeli 3 wyliczone według wzorów (3.2) są postaci

$$E(Q_0) = 44\,\mu^2 + \sigma_e^2$$

$$E(Q_1) = 2\sum_{i=1}^{3} s_i \alpha_i^2 + \sigma_e^2$$

$$E(Q_2) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{s_i} \beta_{ij}^2 + \sigma_e^2$$

$$E(Q_3) = \sigma_e^2$$

Tabela 2. Wysokość (w cm) roślin słonecznika

Linie ojcowskie	Linie mateczne	Powtórzenia 1	2	3	4	Średnie dla linii matecz.	Średnie dla linii ojcow.
	1	115.14	131.14	128.43	120.29	123.75	
1	2	82.43	98.14	90.86	79.43	87.72	106.25
	3	99.71	115.29	110.43	103.71	107.29	
	1	86.14	83.43	91.57	73.86	83.75	
	2	75.00	90.57	80.43	74.71	80.18	
2	3	98.00	111.71	113.86	104.71	107.07	86.44
	4	85.00	73.71	77.43	62.86	74.75	
	1	125.00	138.14	136.29	130.71	132.54	
	2	106.14	112.14	117.14	109.00	111.11	
3	3	115.43	123.14	132.57	125.29	124.11	119.85
	4	108.00	111.29	126.00	101.29	111.65	

Średnia ogólna: 103.99

Tabela 3. Analiza wariancji dla eksperymentu

Źródło zmienności	Suma kwadratów	Stopnie swobody	Średni kwadrat
μ	475812.48	1	475812.48
Między liniami ojcowskimi	9030.58	2	4515.29
Między liniami matecznymi (wewnątrz linii ojcowskich)	6314.58	8	789.32
Błąd	1400.98	33	42.45
Całość	492558.62	44	

Oceny punktowe parametrów modelu wyznaczone według wzorów (3.3) i (3.4) są następujące

$\hat{\mu} = 103.99$

$\hat{\alpha} = (2.26,\ -17.55,\ 15.86)'$

$\hat{\beta} = (17.50,\ -18.54,\ 1.04,\ -2.69,\ -6.26,\ 20.63,\ -11.69,$
$12.69,\ -8.75,\ 4.26,\ -8.21)'$

$\hat{\sigma}_e^2 = 42.45$

Hipoteza $H_A : \alpha_i = 0$, $i=1,2,3.$

Wartość F_A statystyki $\mathcal{F}_A$ wynosi tu 106.367. Zauważamy, że $F_A > F_{0.05;2,33} = 3.285$. Wynik ten oznacza, że hipotezę o jednakowym wpływie linii ojcowskich na badaną cechę należy odrzucić na poziomie istotności $\alpha = 0.05$.

Hipoteza $H_{B|A} : \beta_{ij} = 0$, $i=1,2,3$, $j=1,\ldots,s_i$.

Obecnie $F_{B|A} = 18.594$ i zachodzi nierówność

$$F_{B|A} > F_{0.05;8,33} = 2.235 .$$

Hipotezę $H_{B|A}$ należy odrzucić, co oznacza, że istnieją różnice między potomstwem różnych linii matecznych w obrębie co najmniej jednej linii ojcowskiej.

Jednoczesne przedziały ufności dla liniowych funkcji efektów stałych określamy ze wzoru (3.5). Na przykład dla $i=0$, $a = 1_{44}/44$, $P_o y = 103.99\ 1_{44}$, $F_{0.05;1,33} = 4.14$. i $Q_3 = 42.45$ uzyskujemy ze wzoru (3.5) 95 procentowy przedział ufności dla μ - średniej ogólnej w eksperymencie. Podobnie dla $i=1$, $P_1 y = (2.26 \cdot 1'_{12}\ ,\ -17.55 \cdot 1'_{16}\ ,\ 15.86\ 1'_{16})'$, $F_{0.05;2,33} = 3.285$ i $Q_3 = 42.45$ wzór (3.5), dla odpowiedniego doboru wektora a, umożliwia konstrukcję 95 procentowych jednoczesnych przedziałów ufności dla różnic $\alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_1 - \alpha_3$ oraz $\alpha_2 - \alpha_3$. Dla $i = 2$, $P_2 y = (17.50\ 1'_4\ ,\ -18.54\ 1'_4\ ,\ 1.04\ 1'_4\ ,\ -2.69\ 1'_4\ ,\ -6.26\ 1'_4\ ,\ 20.63\ 1'_4\ ,\ -11.69\ 1'_4,\ 12.69\ 1'_4,\ -8.74\ 1'_4,\ 4.26\ 1'_4,\ -8.21\ 1'_4)'$, $F_{0.05;8,33} = 2.235$, $Q_3 = 42.45$ oraz odpowiedniego doboru wektora a uzyskujemy 95 procentowe jednoczesne przedziały ufności dla różnic $\beta_{k\ell} - \beta_{km}$, $k=1,2,3$, $\ell,m=1,\dots,s_i$. Przedziały te zawarte są w Tabeli 4.

95 procentowy przedział ufności dla σ_e^2 wyznaczony ze wzoru (3.7) przy $h_1 = \chi^2_{0.975;33} = 19.0836$, $h_2 = \chi^2_{0.025;33} = 50.6879$ (odczytanych z tradycyjnych tablic rozkładu chi-kwadrat) oraz $y'P_3 y = 1400.98$ (z Tabeli 3)

Tabela 4. 95 procentowe przedziały ufności dla liniowych funkcji efektów stałych

Funkcja estymowana	Przedział ufności
μ	[102.00 , 105.98]
$\alpha_1 - \alpha_2$	[13.43 , 26.19]
$\alpha_1 - \alpha_3$	[-19.98 , -7.22]
$\alpha_2 - \alpha_3$	[-39.31 , -27.51]
$\beta_{11} - \beta_{12}$	[16.56 , 55.52]
$\beta_{11} - \beta_{13}$	[-3.02 , 35.94]
$\beta_{12} - \beta_{13}$	[-39.06 , -0.10]
$\beta_{21} - \beta_{22}$	[-15.91 , 23.05]
$\beta_{21} - \beta_{23}$	[-42.80 , -3.84]
$\beta_{21} - \beta_{24}$	[-10.48 , 28.48]
$\beta_{22} - \beta_{23}$	[-46.37 , -7.41]
$\beta_{22} - \beta_{24}$	[-14.05 , 24.91]
$\beta_{23} - \beta_{24}$	[12.84 , 51.80]
$\beta_{31} - \beta_{32}$	[1.96 , 40.92]
$\beta_{31} - \beta_{33}$	[-11.05 , 27.91]
$\beta_{31} - \beta_{34}$	[1.42 , 40.38]
$\beta_{32} - \beta_{33}$	[-32.49 , 6.47]
$\beta_{32} - \beta_{34}$	[-20.02 , 18.94]
$\beta_{33} - \beta_{34}$	[-7.01 , 31.95]

wynosi

$$[27.64 \quad , \quad 73.41] \quad ,$$

podczas gdy przedział o minimalnej długości wyznaczony przy $h_1 = 20.3399$, $h_2 = 55.4285$ (wyliczonych procedurą Konysa i Molińskiego (1987)) jest postaci

$$[\ 25.28\ ,\ 68.88\ ] \quad .$$

Jeśli teraz przyjmiemy, że linie ojcowskie są ustalone w eksperymencie a linie mateczne wewnątrz każdej linii ojcowskiej wybrane losowo z nieskończonej populacji tych linii, to analizę eksperymentu będziemy prowadzić zgodnie z ustaleniami z paragrafu 4. Wówczas wartości oczekiwane średnich kwadratów ze wzorów (4.2) przyjmą postaci

$$E(Q_o) = 44\,\mu^2 + 4\,\sigma^2_{b|A} + \sigma^2_e \ ,$$

$$E(Q_1) = 2\sum_{i=1}^{3} s_i\alpha_i^2 + 4\,\sigma^2_{b|A} + \sigma^2_e \ ,$$

$$E(Q_2) = 4\,\sigma^2_{b|A} + \sigma^2_e \ ,$$

$$E(Q_3) = \sigma^2_e$$

Ocenami punktowymi parametrów modelu (patrz (4.3)) są

$$\hat{\mu} = 103.99 \ ,$$

$$\hat{\alpha} = (2.26,\ -17.55,\ 15.86)' \ ,$$

$$\hat{\sigma}^2_{b|A} = 186.72$$

$$\hat{\sigma}^2_e = 42.45 \quad .$$

Oceny punktowe ilorazu wariancji oraz współczynnika korelacji wewnątrzklasowej otrzymujemy z (4.4) w postaci

$$\hat{\gamma} = 4.40 \ ,$$

$$\hat{\rho} = 0.81 \quad .$$

Hipoteza $H_A : \alpha_i = 0$, $i=1,2,3$.

Wartość F_A statystyki $\mathcal{F}_A$ wynosi tutaj 5.72. Jest ona większa od wartości $F_{0.05;2,8} = 4.459$. Hipotezę o jednakowym oddziaływaniu efektów ojcowskich należy zatem odrzucić na poziomie istotności $\alpha=0.05$.

Hipoteza $H_{b|A} : \sigma^2_{b|A} = 0$.

Wartość $F_{b|A}$ statystyki $\mathcal{F}_{b|A}$ wynosi 18.594 i zachodzi

$$F_{b|A} > F_{0.05;8,33} = 2.235 \quad .$$

Zatem na poziomie istotności $\alpha=0.05$ hipotezę $H_{b|A}$ należy odrzucić.

Jednoczesne 95 procentowe przedziały ufności dla funkcji liniowych efektów stałych wyznaczamy ze wzoru (4.5). Przyjmując w (4.5) i=0, $F_{0.05;1,8} = 5.318$, $Q_2 = 789.32$ oraz $\mathbf{P}_o\mathbf{y}$ i $\mathbf{a}$ jak w modelu stałym uzyskujemy przedział ufności dla μ. Podobnie, przyjmując w (4.5) i=1,

$F_{0.05;2,8} = 4.459$, $Q_2 = 789.32$ oraz $P_2 y$ jak w modelu stałym i dobierając odpowiednio wektor a uzyskamy jednoczesne przedziały ufności dla różnic $\alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_1 - \alpha_3$, $\alpha_2 - \alpha_3$. Przedziały te są przedstawione w Tabeli 5.

Tabela 5. Dokładne 95 procentowe przedziały ufności dla funkcji efektów stałych

Funkcja estymowana	Przedział ufności
μ	[94.25 , 113.75]
$\alpha_1 - \alpha_2$	[-12.23 , 51.85]
$\alpha_1 - \alpha_3$	[-45.64 , 18.44]
$\alpha_2 - \alpha_3$	[-66.07 , -3.75]

Dalej wyznaczymy przedziały ufności dla kilku funkcji komponentów wariancyjnych.

Przedział ufności dla σ_e^2 jest taki jak w modelu stałym. Przedział ufności dla $\sigma^2_{b|A}$ wyznaczymy ze wzoru (4.7), przyjmując $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, $h_{21} = \chi^2_{0.975;8} = 2.18$, $h_{22} = \chi^2_{0.025:8} = 17.535$, $h_{31} = \chi^2_{0.975;33} = 19.0836$, $h_{32} = \chi^2_{0.025;33} = 50.6879$ oraz $y'P_2y = 6314.58$ i $y'P_3y = 1400.98$.
Przedziały ufności dla γ i ρ uzyskujemy ze wzorów (4.8) i (4.9) przyjmując $f_1 = 1/F_{0.025;8,33} = 0.3825$, $f_2 = F_{0.025;33,8} = 3.8777$ oraz $Q_2/Q_3 = 18.59$. Przedziały te zamieszczone są w Tabeli 6.

Dodatkowo w Tabeli 6 zamieszczone są również przedziały ufności wyznaczone dla wyżej wymienionych funkcji zgodnie z zasadą minimum długości, tj. dla stałych $h_{21} = 2.7027$, $h_{22} = 24.9147$ (patrz tablice Tate'a i Kaletta (1959)), $h_{31} = 20.3398$, $h_{32} = 55.4285$ (patrz h_1 i h_2 dla modelu stałego) oraz $f_1 = 0.2378$, $f_2 = 3.1019$ (patrz tablice Kali i Molińskiego (1984)).

Tabela 6. Przedziały ufności dla funkcji komponentów wariancyjnych w modelu mieszanym

Funkcja estymowana	Przedział ufności tradycyjny	Przedział ufności najkrótszy
σ_e^2	[27.64 , 73.41]	[25.28 , 68.88]
$\sigma^2_{b\|A}$	[71.68 , 717.24]	[46.14 , 577.78]
γ	[1.53 , 17.77]	[0.86 , 14.17]
ρ	[0.60 , 0.95]	[0.46 , 0.93]*

* uwaga o długości przedziału dla ρ w końcu paragrafu 4.

Współczynnik ufności przedziałów dla σ_e^2, γ oraz ρ wynosi 0.95 podczas, gdy współczynnik ufności przedziału dla $\sigma^2_{b|A}$ jest nie mniejszy niż $(0.95)^2 \simeq 0.90$.

Jeżeli dalej założymy, że zarówno linie ojcowskie jak i mateczne są wybrane losowo z nieskończonych populacji tych linii, analizę eksperymentu przeprowadzać będziemy zgodnie ze wzorami z paragrafu 5 poświęconego analizie modelu losowego. Wartości oczekiwane średnich kwadratów według (5.1) są następujące

$$E(Q_o) = 44\mu^2 + 14.91\sigma_a^2 + 4\sigma_{b|a}^2 + \sigma_e^2 \quad ,$$
$$E(Q_1) = 14.54\sigma_a^2 + 4\sigma_{b|a}^2 + \sigma_e^2 \quad ,$$
$$E(Q_2) = 4\sigma_{b|a}^2 + \sigma_e^2 \quad ,$$
$$E(Q_3) = \sigma_e^2 \quad .$$

Wówczas oceny punktowe parametrów modelu uzyskamy ze wzorów (5.2) oraz (5.3) a oceny współczynników ρ_1 oraz ρ_2 ze wzorów (5.4). Są one następujące :

$$\hat{\mu} = 103.99 \quad ,$$
$$\hat{\sigma}_a^2 = 256.26 \quad ,$$
$$\hat{\sigma}_{b|a}^2 = 186.72 \quad ,$$
$$\hat{\sigma}_e^2 = 42.45 \quad ,$$
$$\hat{\rho}_1 = 0.91 \quad ,$$
$$\hat{\rho}_2 = 0.53 \quad .$$

Jak zauważono w paragrafie 5 ocena punktowa parametru μ średniej w eksperymencie nie jest tutaj najlepsza, a jest tylko w przybliżeniu najlepsza.

Wartości oczekiwane średnich kwadratów według (5.6) dla Q_o i Q_1 oraz według (5.1) dla Q_2 i Q_3 są odpowiednio równe

$$E(Q_o) = 44\,\mu^2 + 14.67\,\sigma_a^2 + 4\,\sigma_{b|a}^2 + \sigma_e^2$$
$$E(Q_1) = 14.67\,\sigma_a^2 + 4\,\sigma_{b|a}^2 + \sigma_e^2$$
$$E(Q_2) = 4\,\sigma_{b|a}^2 + \sigma_e^2$$
$$E(Q_3) = \sigma_e^2$$

Hipoteza $H_a : \sigma_a^2 = 0$.

Wartość F_a statystyki $\mathcal{F}_a$ wynosi tutaj 5.72 i jest większa od $F_{0.05;2,8} = 4.459$. A zatem na poziomie istotności α=0.05 hipotezę H_a odrzucamy.

Hipoteza $H_{b|a} : \sigma_{b|a}^2 = 0$ także zostaje odrzucona na poziomie istotności α=0.05, co zostało pokazane wcześniej przy analizie modelu mieszanego. 95 procentowy przedział ufności dla μ wyznaczamy ze wzoru (5.7) biorąc $t_{0.025;2} = 4.303$. Jest on postaci

$$[60.42 \quad , \quad 147.56]$$

Przedziały ufności dla komponentów wariancyjnych uzyskamy z (5.9) biorąc $h_{11} = \chi^2_{0.975;2} = 0.05$, $h_{12} = \chi^2_{0.025;2} = 7.378$ (z tradycyjnych tablic rozkładu ch-kwadrat) lub $h_{11} = 0.1025$, $h_{12} = 21.4812$ (z tablic Tate'a i Kaletta (1958)), $y'P_1y = 9030.58$ oraz h_{21}, h_{22}, h_{31}, h_{32}, $y'P_2y$ i $y'P_3y$ jak w modelu mieszanym. Przedziały te przedstawione są w Tabeli 7. Współczynnik ufności przedziału dla σ^2_e wynosi 0.95, podczas gdy współczynnik ufności pozostałych dwóch przedziałów jest nie mniejszy niż $(0.95)^2 \simeq 0.90$.

Tabela 7. Przedziały ufności dla komponentów wariancyjnych w modelu losowym

Funkcja estymowana	Przedział ufności tradycyjny	Przedział ufności najkrótszy
σ^2_a	[27.64 , 73.41]	[0 , 5988.40]
$\sigma^2_{b\mid a}$	[71.68 , 717.24]	[46.14 , 577.78]
σ^2_e	[0 , 12257.10]	[25.28 , 68.88]

W komentarzu do Tabeli 7 należy zwrócić uwagę na fakt, że ze względu na nieujemność komponentów wariancyjnych przedziały ufności dla σ^2_a zostały zmodyfikowane przez zastąpienie zerem ich lewej granicy, która w istocie okazała się ujemna (bliższego uzasadnienia takiego postępowania należy szukać np. w monografii Coxa i Hinkleya, 1974, str.224).

Podsumowując przeprowadzoną w obecnym paragrafie analizę eksperymentu pragniemy zwrócić uwagę na konsekwencje wynikające z dążenia do uogólnień we wnioskowaniu. Naturalnym postępowaniem eksperymentatora jest przeprowadzenie wstępnej analizy doświadczenia warunkowo jak w modelu stałym, nawet wówczas, gdy poziomy były wylosowane z nieskończonych populacji, a później próbowanie dokonywania uogólnień na odpowiednie populacje. Należy jednak zwrócić uwagę na to, że takie bezpośrednie uogólnienie może prowadzić do mylących wniosków. Jako przykład to pokazujący może posłużyć tutaj test służący do weryfikowania hipotezy o jednakowym wpływie linii ojcowskich na badaną cechę w modelu stałym i mieszanym. Hipoteza ta została wprawdzie odrzucona (na ustalonym poziomie istotności) w obu sytuacjach, lecz analiza przedziałów ufności dla różnic między efektami linii ojcowskich pokazuje wyraźnie, że wnioskowanie na podstawie modelu "węższego" nie jest słuszne w ogólniejszej sytuacji. Poważną konsekwencją dążenia do uogólnienia wniosków na odpowiednie populacje jest strata na dokładności. Wyraża się ona na przykład w długości odpowiednich przedziałów ufności (w sytuacji ogólniejszej przedziały ufności dla funkcji efektów stałych okazują się znacznie dłuższe). Dodatkowo należy tutaj podkreślić, że dążenie do ogólniejszych wniosków prowadzi do nałożenia wyższych wymagań na planowany eksperyment. Należy zauważyć, że w sytuacji modelu stałego i mieszanego dla wykonania pełnej analizy w oparciu o statystyki o rozkładach dokładnych wystarczało założenie o jednakowej liczbie jednostek doświadczalnych podczas, gdy w sytuacji modelu losowego także założenie nie jest wystarczające. Tutaj, przeprowadzenie analizy w oparciu o metody dokładne wymaga dodatkowo założenia o jednakowej liczbie poziomów czynnika stopnia niższego wewnątrz każdego poziomu czynnika stopnia wyższego, tj. posłużenia się modelem całkowicie ortogonalnym.

LITERATURA

Arnold S.F. (1981). *The Theory of Linear Models and Multivariate Analysis*. John Wiley & Sons. New York.

Burdick R.K., Graybill F.A. (1985). Confidence intervals on the total variance in an unbalanced two-fold nested classification with equal subsampling. *Commun. Statist. - Theor. Meth.* **14**, 761-774.

Cox D.R., Hinkley D.V. (1974). *Theoretical Statistics*. Chapman and Hall, London.

Kala R., Moliński K. (1984). Najkrótszy przedział ufności dla ilorazu wariancji. *Listy Biometryczne* **XXI**, 21-28.

Kempthorne O. (1957). *An Introduction to Genetic Statistics*. John Wiley & Sons. New York.

Khuri A.I. (1981). Simultaneous confidence intervals for functions of variance components in random models. *J. Amer. Statist. Assoc.* **76**, 878-885.

Khuri A.I. (1984). Interval estimation of fixed effects and of functions of variance components in balance mixed models. *Sankhya* **46**(B), 1, 10-28.

Konys L., Moliński K. (1987). Najkrótszy przedział ufności dla wariancji rozkładu normalnego. Praca przyjęta do druku w Rocznikach AR w Poznaniu. Seria Alg. Biometryczne i Statystyczne.

Molińska A., Moliński K. (1988): Estymacja przedziałowa parametrów w nieortogonalnym mieszanym modelu dwukierunkowej klasyfikacji hierarchicznej. *Osiemnaste Colloquium Metodologiczne z Agro-Biometrii*, PAN, 127-138.

Moliński K. (1985). *Estymacja przedziałowa funkcji komponentów wariancyjnych*. Rozprawa doktorska.

Rao C.R., (1982). *Modele liniowe statystyki matematycznej*. PWN, Warszawa.

Rao C.R., Mitra S.K. (1971). *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*. John Wiley & Sons. New York.

Roussas G.G. (1973). *A First Course in Mathematical Statistics*. Addison-Wesley Publishing Company. Massachusetts.

Searle S.R. (1971). *Linear Models*. John Wiley & Sons. New York.

Tate R.F., Klett G.W. (1959). Optimal confidence intervals for the variance of a normal distribution. *J. Amer. Statist. Assoc.* **54**, 674-682.

Tietjen G.L. (1974). Exact and approximate tests for unbalanced random effects designs. *Biometrics* **30**, 573-581.

Zyskind J. (1967). On canonical forms, nonnegative covariance matrices and best and simple least squares linear estimators in linear models. *Annals Math. Statist.* 38, 1092-1109.

Praca wpłynęła 14 czerwca 1989;
w wersji ostatecznej 5 maja 1990

THE ANALYSIS OF A TWO-FOLD NESTED CLASSIFICATION

Summary

In this paper the analysis of experimental data from a two-fold nested classification under the fixed, mixed and random model is presented. The analysis contains testing of hypotheses concerning various parametric functions and the point and interval estimation of them.

Key words: two-fold nested classification model, analysis of variance, hypotheses testing, point estimation, confidence interval